Πανελλαδικές Εξετάσεις
Ημερησίων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Τετάρτη: 17 Ιουνίου 2020
Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Απαντήσεις

Θέμα Α

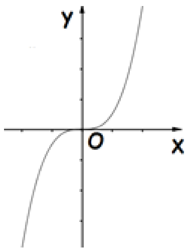
Α1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 76.

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 104.

Α3.

α. Ψ

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, εν έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$.



Α3.

α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Σ

Θέμα Β

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x$

Β1.

- $x\in D_g$: $x\in \mathbb{R}$
- $g(x)\in D_f$: $g(x) > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε $D_{fog} = (0,+\infty)$

- $(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Β2. Η fog είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$(fog)'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+2\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(fog)'(x)=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow(fog)'(x)=\frac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$$

Οπότε η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και $1-1$.΄

Η fog είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (0,+∞), οπότε για το σύνολο τιμών θα έχουμε:

$$(fog)(D_{fog}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right).$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty},DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x+2\right)\dfrac{1}{e^x-1} = +\infty$

Οπότε $fog\left(D_{fog}\right) = D_{(fog)^{-1}} = (1,+\infty)$

- Έστω y = (fog)(x)⇔

$$y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow y(e^x-1) = e^x+2 \Leftrightarrow ye^x - y = e^x+2 \Leftrightarrow$$

$$ye^x - y = e^x+2 \Leftrightarrow ye^x - e^x = y+2 \Leftrightarrow e^x(y-1) = y+2 \Leftrightarrow$$

$$e^x(y-1) = y+2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

Οπότε $(fog)^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

Β3. Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = \frac{-3}{(x-1)(x+2)} < 0$$

Οπότε φ γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞)

Β4.

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

$\kappa = \dfrac{x+2}{x-1}$, $\kappa \to \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$

$= \lim\limits_{\kappa\to+\infty} \ln\kappa = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$$\kappa=\frac{x+2}{x-1},\ \kappa\to\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$$

$$=\lim_{\kappa\to1}\ln\kappa=0$$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x\right)=\lambda\\ f(0)=1-\ln\lambda\end{array}\right\}1-\ln\lambda=\lambda \Rightarrow \ln\lambda=1-\lambda\Rightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0\ (1)$$

Έστω $g(x)=\ln x+x-1$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη οπότε: $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

$$(1)\Rightarrow g(\lambda)=0\Rightarrow g(\lambda)=g(1)\Rightarrow\lambda=1.$$

Γ2. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\le0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Για να ορίζεται η εφαπτομένη στο 0, αρκεί η f να είναι παραγωγίσιμη εκεί, οπότε:

- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1.$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-1+x}{(1-x)x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1.$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με f'(0) = 1.

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον άξονα x'x, τότε:

$$\varepsilon\varphi\omega=f'(0)\Rightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{4}\ \text{αφού}\ 0\le\omega\le\pi$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$.

- Για x = 0: f'(0) = 1
- Για x < 0: $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0\ \ \forall x\in(-\infty,0)$
- Για x > 0: $f'(x)=\text{συνx - ημx}$

$$f'(x)=0\Rightarrow \text{συνx - ημx}=0\Rightarrow \text{συνx}=\text{ημx}\overset{x\neq\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} 1=\frac{\text{ημx}}{\text{συνx}}\Rightarrow 1=\text{εφ}x\Rightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$$

Για x = $\frac{\pi}{2}$: f'($\frac{\pi}{2}$) = -1 $\neq$0.

Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{5\pi}{4}$.

Γ4.

$$a'(t)=-\frac{a(t)}{3}$$

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\Rightarrow y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)\overset{y=0}{\Rightarrow}-(1-a)=x-a$$

$$\Rightarrow -1+a=x-a\Rightarrow x=2a-1$$

Οπότε Β (2α-1, 0)

Έστω η τετμημένη Β: x (t) = 2 α(t) – 1.

$$x'(t)=2a'(t)\Rightarrow x'(t)=2\left(-\frac{a(t)}{3}\right)\Rightarrow x'(t_o)=2\left(-\frac{-1}{3}\right)\Rightarrow x'(t_o)=\frac{2}{3}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$\cdot f'(x)=e^x+2x-e$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$f''(x)=e^x+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Η f’ είναι συνεχής στο $[0,1]$:

$f'(0)=1-e<0$

$f'(1)=e+2-e=2<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$.

Το παραπάνω x_o είναι και μοναδικό αφού η f’ είναι γνησίως αύξουσα.

$\cdot \forall\ x > x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_o) \Rightarrow f'(x)>0$

$\cdot \forall\ x < x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_o) \Rightarrow f'(x)<0$

x	$-\infty$	x_o	$+\infty$
f’	-	0	+
f	↘	ο.ε	↗

Έστω ότι ισχύει:

$$f(x_o)=x_o^2-(e+2)x_o+e-1 \Leftrightarrow e^{x_o}+x_o^2-ex_o-1=x_o^2-(e+2)x_o+e-1$$

$$\Leftrightarrow e^{x_o}-ex_o=-ex_o-2x_o+e \Leftrightarrow e^{x_o}+2x_o-e=0 \Leftrightarrow f'(x_o)=0 \text{ που ισχύει.}$$

Δ2.

Η f παρουσιάζει ο.ε στο x_o, οπότε:

$$f(x) \geq f(x_o)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_o) \geq 0$$

- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} f(x_o)-f(x_o)=0.$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}+\eta\mu\dfrac{1}{x-x_o}\right]=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)-f(x_o)}\left[1+\left(f(x)-f(x_o)\right)\cdot\dfrac{1}{\eta\mu\left(x-x_o\right)}\right]$

$\cdot \left|\left(f(x)-f(x_o)\right)\cdot\dfrac{1}{\eta\mu\left(x-x_o\right)}\right| \leq \left|f(x)-f(x_o)\right|$

$\Rightarrow -\left(f(x)-f(x_o)\right) \leq \left(f(x)-f(x_o)\right)\cdot\dfrac{1}{\eta\mu\left(x-x_o\right)} \leq \left(f(x)-f(x_o)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to x_o}\left[-\left(f(x)-f(x_o)\right)\right]=0 \end{array}\right\} \text{από κ.π. } \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)\cdot\frac{1}{\eta\mu x - x_o}=0.$$

Οπότε το αρχικό όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)-f(x_o)}\cdot\left[1+\left(f(x)-f(x_o)\right)\frac{1}{\text{ημx - x}_o}\right]=+\infty$$

Δ3. Έστω g(x) = f(x) + x – x_o.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με g'(x) = f'(x) + 1> 0 για κάθε x∈(x_o,1).
Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (x_o,1).

Η g συνεχής στο [x_o,1] ως π.σ.σ.

- g(x_o) = f(x_o) < 0, αφού x_o < 1 $\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_o)<f(1)\Rightarrow f(x_o)<0$
- g(1) = f(1) + 1 – x_o = 1 – x_o > 0

Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση g(x) = 0 ⇔f(x) + x = x_o έχει μια τουλάχιστον ρίζα, η οποία είναι και μοναδική αφού αποδείξαμε ότι g γνησίως αύξουσα.

Δ4.

- Η f είναι συνεχής στο [x_o,ρ]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_o,ρ)

Οπότε από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(x_o,ρ)

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_o)}{\rho-x_o}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_o)}{\rho-x_o}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_o)}{-f(\rho)}\Rightarrow$$

$$f'(\xi)=-1+\frac{f(x_o)}{f(\rho)}$$

Ισχύει x_o < ξ < ρ < κ. Οπότε θα έχουμε:

$$\xi<\kappa\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow -1+\frac{f(x_o)}{f(\rho)}<f'(\kappa)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x_o)}{f(\rho)}<f'(\kappa)+1\quad\overset{\rho<1\Rightarrow f(\rho)<0}{\Rightarrow}\quad f(x_o)>f(\rho)(f'(\kappa)+1)$$

Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!
Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής
Νίκος Παπαθανασίου